第 2 节 求无参函数的单调区间、极值、最值（★★）

内容提要

求单调区间、极值、最值是导数的高考导数题第 1 问的常考题型，这一节先研究不含参的情况，我们求出导函数后，若能直接判断正负，则直接判断；否则，可继续求导.

典型例题

类型Ⅰ：只需求一次导

【例 1】（多选）已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+5$，则（　　）

（A）$f(x)$有 2 个极值点

（B）$f(x)$有 3 个零点

（C）点$(1,3)$是曲线$y=f(x)$的对称中心

（D）直线$y=-3x+6$是曲线$y=f(x)$的切线

解析： A 项，由题意，$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，所以$f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$或$x>2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<2$，故$f(x)$在$(-\infty,0)$上↗，在$(0,2)$上↘，在$(2,+\infty)$上↗，所以$f(x)$有 2 个极值点，故 A 项正确；

B 项，三次函数有 3 个零点的充要条件是两个极值异号，如图 1，

因为$f(0)=5>0$，$f(2)=2^3-3\times2^2+5=1>0$，所以本题实际的情况如图 2，

由图可知$f(x)$有且仅有 1 个零点，故 B 项错误；

C 项，要看$(1,3)$是不是对称中心，就看$f(2-x)+f(x)=6$是否成立（相关结论见模块一的第 3 节），

因为$f(2-x)+f(x)=(2-x)^3-3(2-x)^2+5+x^3-3x^2+5=[(2-x)^3+x^3]-3(4-4x+x^2)-3x^2+10$

$=(2-x+x)[(2-x)^2-(2-x)x+x^2]-6x^2+12x-2=2(4-4x+x^2-2x+x^2+x^2)-6x^2+12x-2=6$，

所以点$(1,3)$是曲线$y=f(x)$的对称中心，故 C 项正确；

D 项，直线$y=-3x+6$的斜率为-3，故只需求出$f(x)$的斜率为-3的切线，与$y=-3x+6$对比即可判断 D 项是否正确，令$f'(x)=-3$可得：$3x^2-6x=-3$，解得：$x=1$，

又$f(1)=3$，所以$f(x)$的斜率为-3的切线方程为$y-3=-3(x-1)$，整理得：$y=-3x+6$，故 D 项正确.

答案： ACD

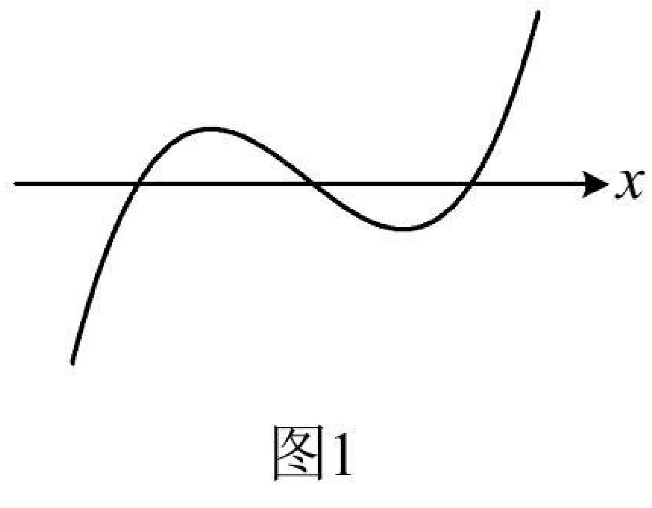


图1

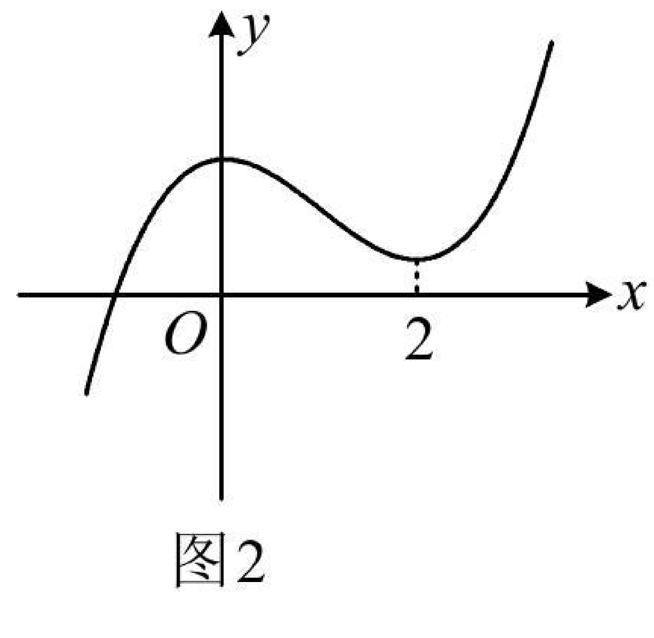
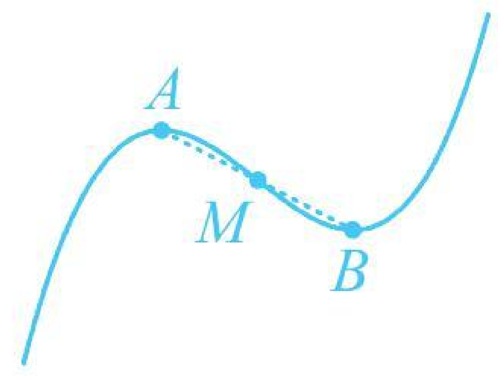


图2

【反思】三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$必有对称中心$(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$，特别地，若$f(x)$有极值点，

则对称中心恰好为图象上极值点处的两个点的中点，如图，熟悉这一结论，选项 C 可直接判断.



【例 2】已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x-1}$，求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

解：由题意，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x-1}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$，

从而 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，单调递增区间为 $(-1,+\infty)$，

故 $f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2}$，无极大值.

【变式】已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{\mathrm{e}^x}$，求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

解：由题意，$f'(x)=-\dfrac{(x+1)(x-2)}{\mathrm{e}^x}$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow -1<x<2$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>2$，

从而 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,2)$，单调减区间为 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$，

故 $f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-\mathrm{e}$，极大值 $f(2)=\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$.

【反思】当函数有多个单调递增区间（或递减区间）时，不要用并集符号连接，用逗号隔开即可.

【例 3】（2022·全国乙卷）函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值，最大值分别为（　　）

（A）$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$-\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}+2$　　（D）$-\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}+2$

解析：欲研究最值，先求导，研究单调性，由题意，$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cos x=(x+1)\cos x$，

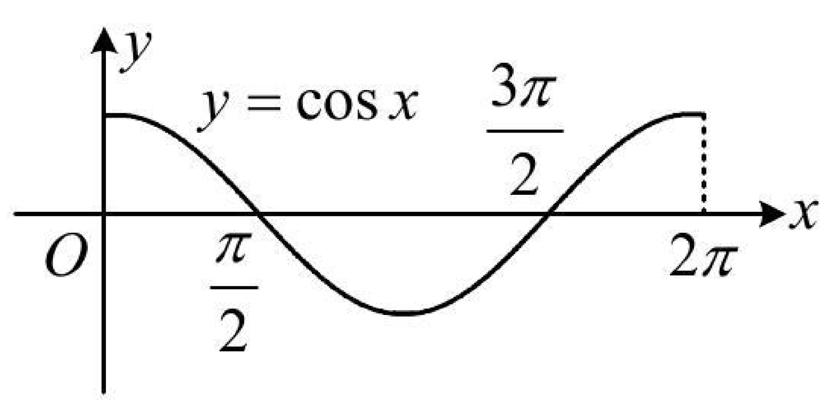
当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$x+1>0$，所以 $f'(x)$ 的正负与 $\cos x$ 相同，可画出 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象来看，

如图，$f'(x)>0\Leftrightarrow \cos x>0\Leftrightarrow 0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$，$f'(x)<0\Leftrightarrow \cos x<0\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$，

从而 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2})$ 上↗，在 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 上↘，在 $(\dfrac{3\pi}{2},2\pi]$ 上↗，

又 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}+2>f(2\pi)=2$，所以 $f(x)_{\max}=\dfrac{\pi}{2}+2$；因为 $f(0)=2>f(\dfrac{3\pi}{2})=-\dfrac{3\pi}{2}$，所以 $f(x)_{\min}=-\dfrac{3\pi}{2}$.

答案：D



类型Ⅱ：需二次求导

【例 4】（2023·新高考Ⅱ卷节选）证明：当$0<x<1$时，$x-x^2<\sin x$.

证明：（观察发现要证的不等式各部分都不复杂，故直接移项构造函数，通过求导分析单调性）

设$\varphi(x)=x-x^2-\sin x(0<x<1)$，则$\varphi'(x)=1-2x-\cos x$，（不易直接判断$\varphi'(x)$的正负，故二次求导）

$\varphi''(x)=-2+\sin x<0$，所以$\varphi'(x)$在$(0,1)$上单调递减，又$\varphi'(0)=0$，所以$\varphi'(x)<0$，

故$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，因为$\varphi(0)=0$，所以$\varphi(x)<0$，即$x-x^2-\sin x<0$，故$x-x^2<\sin x$.

【变式】已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，求$f(x)$在$[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$上的最大值.

解：由题意，$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，

（看不出$f'(x)$的正负，直接二次求导又会变得更复杂，所以把分子拿出来单独求导分析）

设$g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x(\mathrm{e}\le x\le \mathrm{e}^2)$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}<0$，所以$g(x)$在$[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$上单调递减，

又$g(\mathrm{e})=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\ln\mathrm{e}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<0$，所以$g(x)<0$，从而$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$上单调递减，所以$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

【总结】求出$f'(x)$后，若无法直接判断其正负，可考虑二次求导，若为分式结构，有时为了避免再次求导结果变得更复杂，应把分子单独拿出来求导分析.

强化训练

1.（2022·重庆模拟·★★）函数$f(x)=x-\dfrac{6}{x}-5\ln x$的单调递减区间为（　　）

（A）$(0,2)$　　（B）$(2,3)$　　（C）$(1,3)$　　（D）$(3,+\infty)$

2.（2023·天津模拟·★★）设函数$f(x)=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$，求$f(x)$的极值.

3.（2021·全国甲卷节选·★★）已知$a>0$且$a\ne 1$，函数$f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$，当$a=2$时，求$f(x)$的单调区间.

4．（2022 • 广东汕头三模 • ★★）已知函数 $f(x)=x-2\sin x$，求 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的极值.

5．（2022 • 河南郑州期末 • ★★★）已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，求函数 $f(x)$ 的极值.

6．（2022 • 四川成都期末 • ★★★）已知函数 $f(x)=2x\ln x-\frac{1}{2}x^2-x+2$，求 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的最小值.

7．（2022 • 天津模拟 • ★★★）已知函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\ln x-x$，求 $f(x)$ 的单调区间.

8．（2023 • 全国甲卷节选 • ★★★）已知 $f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 若 $a=8$，讨论 $f(x)$ 的单调性.